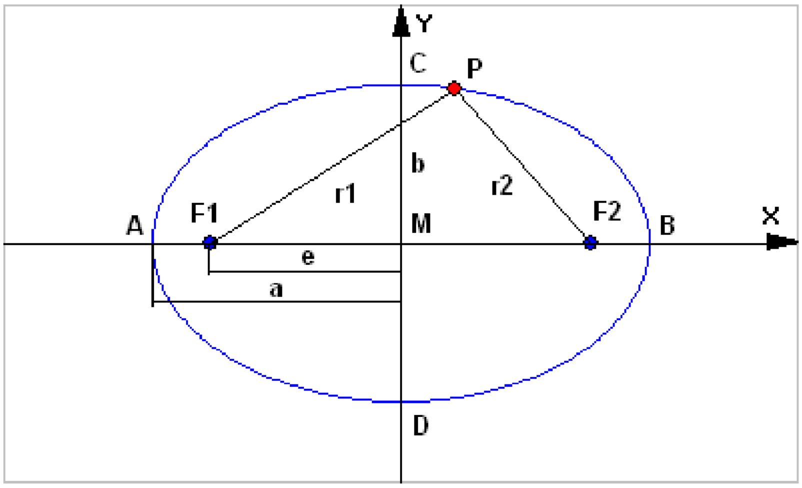
Mathematische Zusammenhänge bei Kegelschnitten

Ellipse

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant und gleich der großen Achse der Ellipse ist. Es gilt:

F1P + PF2 = const. = 2a



A,B: Hauptscheitel
M: Mittelpunkt
a: große Halbachse
b: kleine Halbachse

Lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{(a^2 - b^2)}$
Numerische Exzentrizität: $\varepsilon = e/a$ mit $\varepsilon < 1$
Parameter: $p = b^2/a$ (zur Hauptachse senkrechte Sehne im Brennpunkt)

Brennpunkte:
F1 (-e;0)
F2 (e;0)

Hauptachse: AB = 2a
Nebenachse: CD = 2b

F1F2 = 2e ($a > e \geq 0$)

Gleichung in Mittelpunktform:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
mit M(0;0)

Allgemeine Gleichung bei achsparalleler Lage:

$(x-x_m)^2/a^2 + (y-y_m)^2/b^2 = 1$

mit $M(x_m;y_m)$

Scheitelgleichung:

$y^2 = 2px - p/ax^2$

Gleichungen in Parameterform:

Bei Mittelpunktlage:
$x = a \cos t$
$y = b \sin t$
mit $M(0;0)$

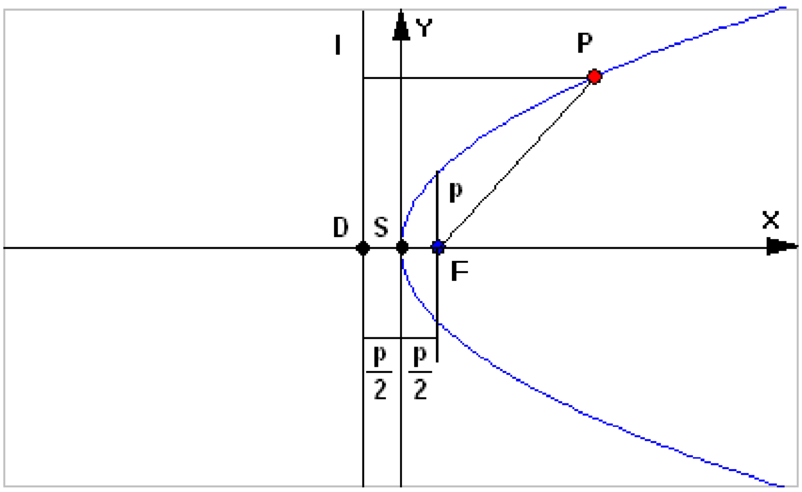
Bei achsparalleler Lage:
$x = x_m + a \cos t$
$y = y_m + b \sin t$
mit $M(x_m;y_m)$

Gleichung in allgemeiner Form:

$ax^2 + 2by + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Parabel

Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, welche von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l gleichen Abstand haben. Der Punkt F ist der Brennpunkt und die Gerade l die Leitlinie (Direktrix).



F: Brennpunkt
S: Scheitelpunkt

M: Mittelpunkt
a: große Halbachse
b: kleine Halbachse

Halbparameter: $p = DF$ ($p > 0$)
Parameter: $2p$

Brennweite: $SF = SD = p/2$

Scheitelgleichung:

$y^2 = 2px$
$y = \pm \sqrt{2px}$ mit $x > 0$

Brennpunkt: $F(p/2;0)$

Gleichungen in Parameterform:

$x = t^2$
$y = \pm kt$
mit Scheitelpunkt $S(0;0)$

Allgemeine Gleichung bei achsparalleler Lage:

$(y - y_m)^2 = 2p(x - x_m)$
mit Scheitelpunkt $S(x_m;y_m)$

Gleichungen in Parameterform:

$x = x_m + t^2$
$y = y_m \pm kt$
mit Scheitelpunkt $S(x_m;y_m)$

Gleichung in allgemeiner Form:

$cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Öffnungsrichtungen bei achsparalleler Lage:

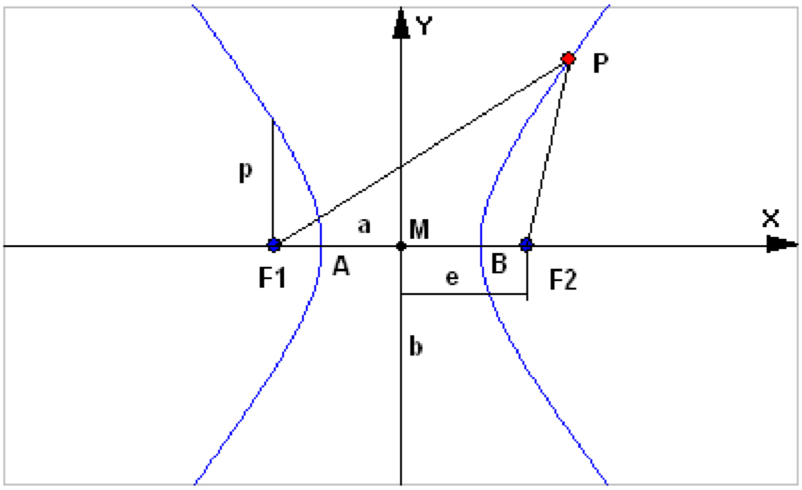
nach rechts: $(y - y_m)^2 = 2p(x - x_m)$
nach links: $(y - y_m)^2 = -2p(x - x_m)$
nach oben: $(x - x_m)^2 = 2p(y - y_m)$
nach unten: $(x - x_m)^2 = -2p(y - y_m)$

mit Scheitelpunkt: $S(x_m;y_m)$

Hyperbel

Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant oder gleich der reellen Achse der Hyperbel ist. Es gilt:

F1P - PF2 = const. < F1F2



A,B: Hauptscheitel
M: Mittelpunkt
PF1,PF2: Brennstrahlen

Lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
Numerische Exzentrizität: $\varepsilon = e/a$ mit $\varepsilon > 1$
Parameter: $2p = 2b^2/a$ (zur Hauptachse senkrechte Sehne in Brennpunkten)

Brennpunkte:
F1 (-e;0)
F2 (e;0)

AB = 2a (reelle Achse)

F1F2 = 2e
PF1 - PF2 = 2a

<u>Gleichung in Mittelpunktform:</u>

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
mit M(0;0)

<u>Allgemeine Gleichung bei achsparalleler Lage:</u>

$(x-x_m)^2/a^2 - (y-y_m)^2/b^2 = 1$
mit $M(x_m;y_m)$

<u>Scheitelgleichung:</u>

$y^2 = 2px + p/a\, x^2$
mit M(0;0)

<u>Gleichungen in Parameterform:</u>

$x = a / \cos t$
$y = b \tan t$
mit M(0;0)

$x = \pm \cosh t$
$y = b \sinh t$
mit $M(0;0)$

$x = x_m + a \cos t$
$y = y_m + b \sin t$
mit $M(x_m;y_m)$

Gleichung in allgemeiner Form:

$ax^2 - cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ (mit $e > 0$)

Allgemeine Kegelschnitte

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts besitzt die Form:

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

a, b, c, d, e und f sind beliebige reelle Koeffizienten. Ein Kegelschnitt entsteht beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit dem Neigungswinkel α der Mantellinie durch eine Ebene welche den Neigungswinkel β besitzt.

Ellipse: $0 \leq \beta < \alpha$
Parabel: $\alpha = \beta$
Hyperbel: $\pi/2 \geq \beta > \alpha$

Beim Schnitt durch die Kegelspitze entstehen Punkt, Geradenpaar und Gerade.

Durch eine Drehung des Koordinatensystems mit der Koordinatentransformation

$x = x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha)$
$y = y' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha)$

lässt sich für eine geeignete Winkelgröße a stets erreichen, dass das gemischt-quadratische Glied $x' \cdot y'$ entfällt. Für $a = c$ muss $\alpha = 45°$ gewählt werden. Ist $a \neq c$ muss α so gewählt werden, dass $2a = 2b / (a - c)$. Hierdurch entsteht für den Kegelschnitt die transformierte allgemeine Form:

$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Achsen dieses Kegelschnitts parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Für die Diskussion dieser Kegelschnittgleichung gilt:

bei $a \neq 0$ und $c \neq 0$ mit $n = d^2/a + e^2/c - f$:

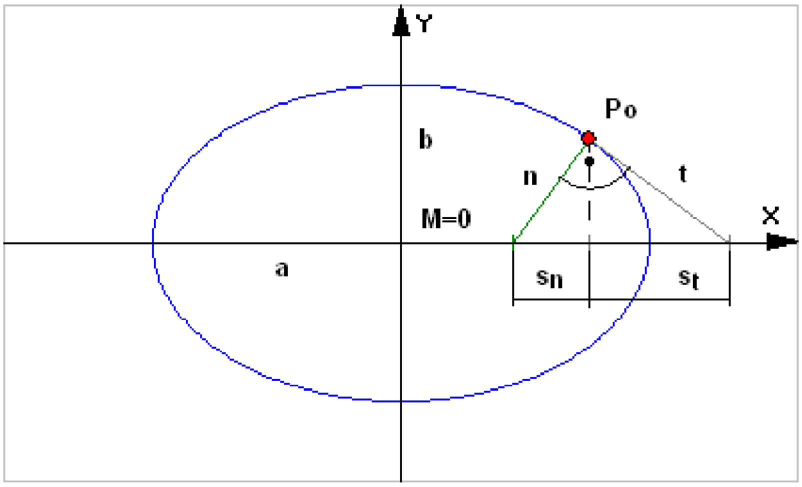
$n > 0$	$a > 0, c > 0$	Ellipse
$n > 0$	$a < 0, c < 0$	imaginär
$n > 0$	$a \cdot c < 0$	Hyperbel
$n = 0$	$a \cdot c > 0$	Punkt
$n = 0$	$a \cdot c < 0$	Paar sich schneidender Geraden

n = 0	a · c < 0	Paar sich schneidender Geraden
n < 0	a > 0, c > 0	imaginär
n < 0	a < 0, c < 0	Ellipse
n < 0	a · c < 0	Hyperbel

bei a = 0 oder c = 0:

a = 0, c ≠ 0	d ≠ 0	Parabel
a = 0, c ≠ 0	d = 0	Paar zusammenfallender paralleler Geraden wenn e² - fc = 0
a ≠ 0, c = 0	e ≠ 0	Parabel
a ≠ 0, c = 0	e = 0	Paar zusammenfallender paralleler Geraden wenn d² - fa = 0
a = 0, c = 0	d ≠ 0, e ≠ 0	Gerade
a = 0, c = 0	d = 0, e ≠ 0	Parallele zur x-Achse
a = 0, c = 0	d ≠ 0, e = 0	Parallele zur y-Achse
a = 0, c = 0	d = 0, e = 0	imaginär

Ellipse - Gerade



Für Ellipse in Mittelpunktlage $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ in Punkt $P(x_0;y_0)$ gilt:

Tangente: $xx_0 / a^2 + yy_0 / b^2 = 1$
Normale: $y - y_0 = a^2y_0 / (b^2x_0)\ (x - xx_0)$
Tangentenlänge: $t = \sqrt{(y_0^2 + (a^2/x_0 - x_0)^2)}$
Normalenlänge: $n = b/ a^2\sqrt{(a^2a^2 - e^2x_0^2)}$
Subtangente: $st = |a^2/x_0 - x_0|$
Subnormale: $sn = |b^2x_0/ a^2|$

Für Ellipse $(x - x_m)^2 / a^2 + (x - ym)^2 / b^2 = 1$ in achsparalleler Lage mit $M(x_m;y_m)$ gilt:

Tangente: $(x - x_m)\ (x_0 - x_m) / a^2 + (y - y_m)\ (y_0 - y_m) / b^2 = 1$

Normale: $y - y_0 = a^2 (y_0 - y_m) / (b^2 (x_0 - x_m)) (x - x_0)$

Schnittpunkt Ellipse - Gerade:

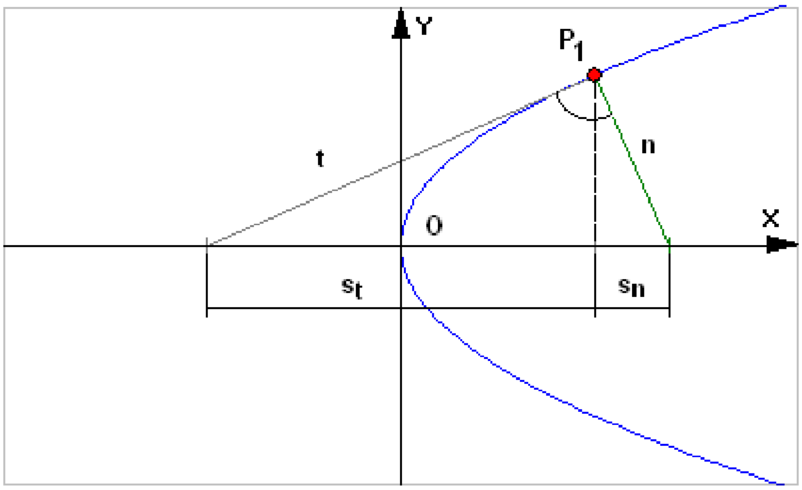
Ellipse: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$
Gerade: $y = mx + b$

$x_{1;2} = -(a^2mb_1)/(b^2 + a^2m^2) \pm ab/(b^2 + a^2m^2) \sqrt{a^2m^2 + b^2 - b_1^2}$
$y_{1;2} = b^2b_1/(b^2 + a^2m^2) \pm abm/(b^2 + a^2m^2) \sqrt{a^2m^2 + b^2 - b_1^2}$

Radikand $D = a^2m^2 + b^2 - b_1^2$

$D > 0$: Ellipse wird von der Geraden geschnitten
$D = 0$: Ellipse wird von der Geraden berührt
$D < 0$: Kein Schnitt von Ellipse und Gerade

Parabel - Gerade



Für Parabel $y^2 = 2px$ mit Scheitelpunkt in S(0;0) in Punkt $P(x_1,y_1)$ gilt:

Tangente: $yy_1 = p(x + x_1)$
Normale: $p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$
Tangentenlänge: $t = \sqrt{y_1^2 + 4 x_1^2}$
Normalenlänge: $n = \sqrt{y_1^2 + p^2}$
Subtangente: $s_t = 2x_1$
Subnormale: $s_n = p$

Krümmungsradius: $r = \sqrt{(y_0^2 + p^2)^3} / p^2$
Krümmungsmittelpunkt: Mk $(3x_0 + p ; -y_0^3 /p^2)$

Für Parabel $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ in achsparalleler Lage mit Scheitelpunkt in S(x1;y1) gilt:

Tangente: $(y - y_0)(y_1 - y_0) = p (x + x_1 - 2x_0)$
Normale: $p(y - y_1) + (y_1 - y_0)(x - x_1) = 0$

Schnittpunkt Parabel - Gerade:

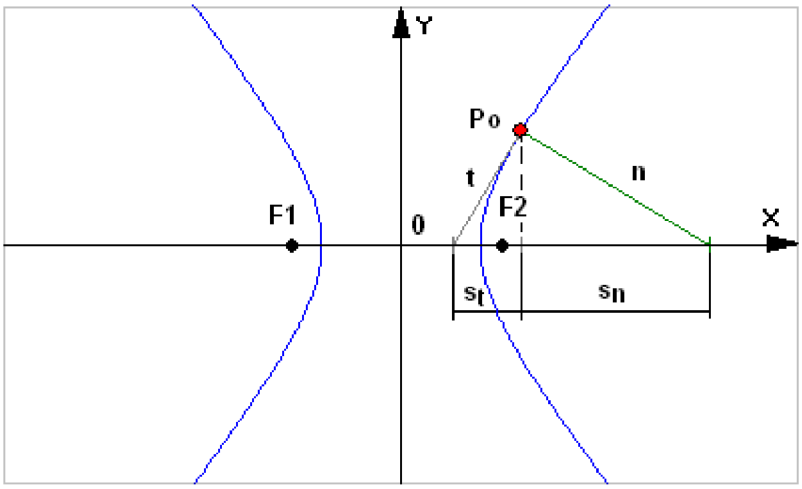
Parabel in Scheitellage: $y^2 = 2px$ ($p > 0$)
Gerade: $y = mx + b$

$x_{1;2} = (p - bm)/m^2 \pm 1/m^2 \sqrt{(p (p - 2bm))}$
$y_{1;2} = p/m \pm 1/m \sqrt{(p (p - 2bm))}$

Radikand $D = p(p - 2bm)$

$D > 0$: Parabel wird von Gerade geschnitten
$D = 0$: Parabel wird von Gerade berührt
$D < 0$: Kein Schnitt von Parabel und Gerade

Hyperbel - Gerade



Für Hyperbel in Mittelpunktlage $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ in Punkt $P(x_0,y_0)$ gilt:

Tangente: $xx_0 / a^2 - yy_0 / b^2 = 1$
Normale: $y - y_0 = -a^2y_0 / (b^2x_0) (x - xx_0)$
Tangentenlänge: $t = \sqrt{(y_0^2 + (x_0 - a^2/x_0)^2)}$
Normalenlänge: $n = b/a^2 \sqrt{(e^2x_0^2 - a^2a^2)}$
Subtangente: $st = |a^2/x_0 - x_0|$
Subnormale: $sn = |b^2x_0 / a^2|$

Für Hyperbel $(x - x_m)^2/a^2 - (x - y_m)^2/b^2 = 1$ in achsparalleler Lage mit mit $M(x_m;y_m)$ gilt:

Tangente: $(x - x_m) (x_0 - x_m) / a^2 - (y - y_m) (y_0 - y_m) / b^2 = 1$
Normale: $y - y_0 = -a^2 (y_0 - y_m) / (b^2 (x_0 - x_m)) (x - x_0)$

Schnittpunkt Hyperbel - Gerade:

Hyperbel: $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$
Gerade: $y = mx + b$

$x_{1;2} = (a^2mb_1)/(b^2 - a^2m^2) \pm ab/(b^2 - a^2m^2) \sqrt{(b^2 + b_1^2 - a^2m^2)}$
$y_{1;2} = b^2b_1/(b^2 - a^2m^2) \pm abm/(b^2 - a^2m^2) \sqrt{(b^2 + b_1^2 - a^2m^2)}$

Radikand $D = a^2m^2 + b^2 - b_1^2$

$D > 0$: Hyperbel wird von Gerade geschnitten
$D = 0$: Hyperbel wird von Gerade berührt
$D < 0$: Kein Schnitt von Hyperbel und Gerade